

Analiza możliwości zastosowania funkcji Trefftza do rozwiązywania nieliniowych zagadnień odwrotnych mechaniki

Niniejsza praca dotyczy zastosowania funkcji Trefftza do wyznaczania rozwiązań przybliżonych zagadnień opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Przedmiotem rozważań jest analiza możliwości wykorzystania tych funkcji w metodach służących do rozwiązywania prostych i odwrotnych problemów nieliniowych.

W początkowej części pracy przedstawiono ogólny opis metody funkcji Trefftza, Metody Elementów Skończonych z bazowymi funkcjami Trefftza oraz metody iteracji Picarda. Zasadnicza jej część jest poświęcona praktycznemu wykorzystaniu tych funkcji w eksperymentach numerycznych dotyczących prostych i odwrotnych zagadnień przewodnictwa ciepła. Najpierw za pomocą klasycznej metody funkcji Trefftza oraz bezwęzłowej Metody Elementów Skończonych (substructuring) z bazowymi funkcjami Trefftza rozwiązano zagadnienia identyfikacji strumienia ciepła w warstwie płaskiej. Dodatkowo przedstawiono optymalne rozmieszczenie punktów pomiarowych. Następnie wykorzystano metodę iteracji Picarda z użyciem funkcji Trefftza do wyznaczenia aproksymacji rozwiązania nieliniowego równania przewodnictwa ciepła. Proste i odwrotne zagadnienie nieliniowe rozwiązano w całym obszarze przestrzennym oraz za pomocą bezwęzłowej Metody Elementów Skończonych z bazowymi funkcjami Trefftza, w której wykorzystuje się podział rozważanego obszaru przestrzennego na podobszary oraz wprowadza się lokalne układy współrzędnych w każdym elemencie.

Kolejna część pracy dotyczy zjawiska wymiany ciepła w elementach konstrukcyjnych bezстыkowego uszczelnienia czołowego. Przedstawione zagadnienie jest silnie nieliniowe ze względu na zależność opisującą strumień ciepła. Zastosowanie metody funkcji Trefftza pozwoliło na znaczne uproszczenie modelu matematycznego rozpatrywanego zagadnienia. Następnie problem został podzielony na dwa zagadnienia liniowe. Pierwsze z nich to brzegowe zagadnienie odwrotne, ponieważ warunek na części brzegu obszaru nie był znany. Natomiast drugie to przykład zagadnienia prostego, gdzie założono znajomość wszystkich warunków brzegowych. Dodatkowo aproksymacja otrzymana w zagadnieniu odwrotnym została przyjęta jako jeden ze znanych warunków brzegowych w zagadnieniu prostym.

W pracy przeprowadzono również analizę możliwości zastosowania funkcji Trefftza do rozwiązywania niejednorodnych równań różniczkowych cząstkowych czwartego rzędu. Za pomocą tych równań opisywane są drgania belki oraz płyty. W przypadku problemów drgań belki rozpatrywano dwa typy zagadnień odwrotnych. Pierwszy z nich to brzegowe zagadnienie odwrotne, w którym identyfikowano warunek brzegowy w oparciu o znane przemieszczenia belki w pewnej odległości od nieznanego brzegu. Natomiast drugi polegał na identyfikacji nieznanego obciążenia belki. Ponadto za pomocą metody iteracji Picarda z użyciem funkcji Trefftza wyznaczono rozwiązanie zagadnienia geometrycznie nieliniowych drgań belki Eulera-Bernoulliego.

Do problemów drgań płyt zastosowano klasyczną metodę funkcji Trefftza. Za pomocą kombinacji liniowej funkcji Trefftza aproksymowano ugięcia cienkiej, prostokątnej płyty. Następnie zbadano możliwość wyznaczenia obciążenia płyty za pomocą tej metody.

Ważną część pracy stanowią twierdzenia o liczbie i liniowej niezależności funkcji Trefftza, ponieważ z każdym równaniem różniczkowym cząstkowym związany jest inny zbiór tych funkcji. Ponadto, od postaci równania zależy liczba funkcji Trefftza danego stopnia. Twierdzenia te sformułowano i udowodniono dla funkcji Trefftza spełniających równanie przewodnictwa ciepła, równanie Laplace'a, równanie drgań belki i płyty.

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów numerycznych wykazano skuteczność przedstawionych metod. Dodatkowo, w przypadku zagadnień odwrotnych zbadano wrażliwość metod na zaburzenia losowe wartości pomiarowych. W podsumowaniu pracy zostały zweryfikowane główne cele pracy, wskazane zostały możliwości praktycznych zastosowań metody funkcji Trefftza oraz pokazano kierunki dalszych badań.