

dr hab. inż. Janusz Zmywaczyk, prof. nadzw. WAT
Wojskowa Akademia Techniczna (WAT)
Wydział Mechatroniki i Lotnictwa (WML)
00-908 Warszawa 49, ul. gen. Sylwestra Kaliskiego 2
tel. 261-837-530, e-mail: janusz.zmywaczyk@wat.edu.pl

Warszawa, 4 sierpnia 2016r.

R e c e n z j a

rozprawy doktorskiej mgr Anny PAWIŃSKIEJ

**pt. „ANALIZA MOŻLIWOŚCI ZASTOSOWANIA FUNKCJI TREFFTZA DO
ROZWIĄZYWANIA NIELINIOWYCH ZAGADNIENÍ ODWROTNYCH
MECHANIKI”**

Przedstawiona do oceny rozprawa doktorska powstała w Katedrze Informatyki i Matematyki Stosowanej Wydziału Zarządzania i Modelowania Komputerowego Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach pod kierownictwem naukowym dr. hab. Artura MACIĄGA, prof. PŚk. Przewód doktorski jest prowadzony na Wydziale Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej.

Recenzję opracowano na zlecenie Dziekana Wydziału Mechatroniki i Budowy Maszyn PŚk prof. dr. hab. inż. Zbigniewa KORUBY z dnia 16 czerwca 2016 r.

1. Omówienie treści rozprawy

Przedłożona do recenzji rozprawa doktorska mgr Anny Pawińskiej ma postać maszynopisu liczącego 187 stron formatu A5 wydrukowanego obustronnie i składa się z 9 rozdziałów poprzedzonych spisem treści i wykazem ważniejszych oznaczeń, a w zakończeniu bibliografią liczącą 98 pozycji literaturowych, spisem rysunków i tabel oraz streszczeń pracy napisanych w języku polskim i angielskim. Tekst pracy został wzbogacony 41 rysunkami oraz 47 tabelami. W tabelach zamieszczono przykładowe postaci funkcji Trefftza oraz wartości błędów aproksymacji dla uzyskanych przez Autorkę przybliżonych rozwiązań wybranych zagadnień bezpośrednich i odwrotnych przewodzenia ciepła, jak również drgań belek i płyt.

Praca jest napisana poprawną polszczyzną i bardzo starannie. Układ pracy jest poprawny i nie budzi zastrzeżeń. Rysunki zamieszczone w pracy są czytelne i ich liczba jest wystarczająca, a ponadto zasadnicze rozdziały pracy (4-8) kończą się krótkim podsumowaniem ułatwiającym jej czytanie.

Rozprawa doktorska mgr Anny Pawińskiej jest pracą teoretyczną poświęconą zastosowaniu funkcji Trefftza do wyznaczania rozwiązań przybliżonych zagadnień opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi, a w szczególności dotyczy możliwości ich wykorzystania do rozwiązywania bezpośrednich i odwrotnych problemów nieliniowych mechaniki. Wyniki badań własnych, na które Autorka powołuje się w pracy jako współautorka, zostały opublikowane w czasopismach z listy Journal Citation Reports, takich jak: *International Journal of Heat and Mass Transfer* (2012, 2015), *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* (2013), *Computational and Applied Mathematics* (2016) oraz w czasopiśmie krajowym – *Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, seria Budowa Maszyn i Zarządzanie Produkcją* (2011). Dodatkowo mgr A. Pawińska może poszczycić się samodzielną pracą poświęconą zastosowaniu funkcji Trefftza w metodzie perturbacji

homotopii, stanowiącą podrozdział w monografii *Badania i Rozwój Młodych Naukowców w Polsce, Nauki Techniczne i Inżynieryjne*, III, Poznań, 2016.

We wstępie, stanowiącym rozdział pierwszy, Doktorantka przedstawiła uzasadnienie podjęcia tematu, jakim była próba połączenia metody Trefftza z metodą kolejnych przybliżeń Picarda do rozwiązywania nieliniowych zagadnień opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi. W rozdziale tym została sformułowana teza i cel badawczy pracy.

W rozdziale drugim znajdujemy bardzo starannie przeprowadzoną kwerendę literatury. Przedmiotem analizy było 85 pozycji literatury, dobranych w sposób właściwy i możliwie kompletny.

Rozdział trzeci poświęcony jest krótkiej charakterystyce metod funkcji Trefftza i kolejnych przybliżeń Picarda w ujęciu ogólnym.

Wyniki badań własnych Doktorantka przedstawiła w rozdziałach 4-8, stanowiących zasadnicze i najbardziej wartościowe części pracy.

Rozdział czwarty zawiera wyniki przybliżonego rozwiązania liniowego niestacjonarnego zagadnienia przewodzenia ciepła w warstwie płaskiej metodą funkcji Trefftza. W rozdziale tym rozpatrzono problem bezpośredni oraz odwrotne zagadnienie graniczne, w którym przedmiotem identyfikacji był strumień ciepła. Na podstawie testów numerycznych wykazano, że zagęszczenie punktów pomiarowych przy brzegu warstwy płaskiej, które odpowiada miejscom zerowym wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju, wpływa na poprawę aproksymacji.

Rozdział piąty dotyczy przybliżonego rozwiązywania nieliniowych zagadnień stacjonarnego przewodzenia ciepła. Przedstawiono w nim dwa nowe podejścia. Pierwsze z nich opiera się na rozłożeniu operatora nieliniowego na sumę operatorów: liniowego oraz nieliniowego. Rozwiązanie poszukuje się metodą kolejnych przybliżeń Picarda. W pierwszym kroku iteracji znajdowane jest rozwiązanie ogólne dla równania jednorodnego w postaci kombinacji liniowej funkcji Trefftza. W drugim kroku iteracji rozpatrywane jest równanie niejednorodne, którego rozwiązanie jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego. Drugie podejście, znane w literaturze jako HT-MES (hybrid Trefftz MES), to bezwęzłowa metoda elementów skończonych z bazowymi funkcjami Trefftza, ale w zastosowaniu do zagadnienia nieliniowego.

Rozdział szósty poświęcony jest wykorzystaniu metody Trefftza do znalezienia przybliżonego rozwiązania w odniesieniu do praktycznego problemu inżynierskiego, jakim była wymiana ciepła w bezstykowym uszczelnieniu czołowym.

Wykorzystaniu funkcji Trefftza w zagadnieniach drgań poprzecznych belek oraz cienkich płyt poświęcone są odpowiednio rozdziały siódmy oraz ósmy pracy. Dodatkowo w każdym z rozdziałów 4-8 podano i udowodniono twierdzenia o liczbie i liniowej niezależności funkcji Trefftza ze względu na istnienie innych zbiorów tych funkcji dla różnych równań różniczkowych cząstkowych.

Wnioski końcowe o charakterze naukowo-badawczym, aplikacyjnym i rozwojowym sformułowano w rozdziale dziewiątym.

2. Ocena rozprawy doktorskiej

Rozprawa doktorska mgr A. Pawińskiej dotyczy ważnej problematyki badawczej, rozwijanej w krajowych (Poznań, Kielce), jak i w zagranicznych ośrodkach naukowych, poświęconej zastosowaniu funkcji Trefftza do znajdowania przybliżonych rozwiązań

liniowych oraz nieliniowych problemów początkowo-brzegowych. Podjęta przez Doktorantkę problematyka badawcza jest aktualna z uwagi na coraz to większe zainteresowania, zarówno o charakterze podstawowym jak i aplikacyjnym, możliwościami wykorzystania metody funkcji Trefftza. Dotyczy to w szczególności rozwiązywania bezpośrednich i odwrotnych problemów nieliniowych z zakresu mechaniki pęknięcia, transportu ciepła w materiałach niejednorodnych z gradientem składu, identyfikacji kształtu obszaru i wielu innych.

W rozprawie został jasno wyodrębniony problem naukowy w oparciu o starannie przeprowadzoną kwerendę literatury, jak i doświadczenie własne Autorki z zakresu modelowania komputerowego zjawisk fizycznych. Jako cel badawczy Doktorantka postawiła sobie:

opracowanie skutecznej metody rozwiązywania wybranych liniowych i nieliniowych, prostych i odwrotnych zagadnień mechaniki.

Osiągnięcie tak postawionego, a zarazem ambitnego celu pracy, wymagało rozwiązania szeregu zadań cząstkowych, które z powodzeniem zostały uzyskane przez Doktorantkę, dając podstawę do sformułowania tezy pracy w postaci:

Metoda funkcji Trefftza jest skutecznym narzędziem rozwiązywania:

- *prostych oraz granicznych zagadnień odwrotnych dla procesów opisywanych nieliniowymi równaniami cząstkowymi,*
- *zagadnień odwrotnych identyfikacji źródeł (obciążeń) termicznych oraz mechanicznych*

Dla poparcia przytoczonej powyżej tezy pracy zastosowano właściwe narzędzie badawcze w postaci oceny skuteczności rozwiązywania bezpośrednich i odwrotnych zagadnień, zarówno granicznych jak i dotyczących identyfikacji źródeł, dla wybranych nieliniowych problemów początkowo-brzegowych przewodzenia ciepła, drgań poprzecznych belek oraz płyt. Muszę w tym miejscu zaznaczyć, że Doktorantka podjęła się bardzo ambitnego i trudnego zadania wykazując się przy tym bardzo dobrym przygotowaniem z zakresu analizy matematycznej, metod numerycznych, informatyki i mechaniki.

Rozwiązania przybliżone wybranych liniowych zagadnień początkowo-brzegowych metodą funkcji Trefftza uzyskano w pracy, stosując klasyczną metodę funkcji Trefftza oraz bezwzględową MES z bazowymi funkcjami Trefftza, a w odniesieniu do zagadnień nieliniowych, dodatkowo wykorzystano metodę kolejnych przybliżeń Picarda. Należy tu podkreślić, że uzyskane w pracy wyniki testów numerycznych są oryginalne i potwierdzają dużą skuteczność metody funkcji Trefftza jako narzędzia rozwiązywania w szczególności nieliniowych zagadnień początkowo-brzegowych.

Rozprawa doktorska mgr A. Pawińskiej zawiera elementy nowości naukowej, które świadczą o jej dysertabilności. Zaliczyłbym do nich:

- sformułowane i udowodnione przez Doktorantkę twierdzenia o liczbie i liniowej niezależności funkcji Trefftza dla równania Fouriera (1D), Laplace'a (2D), równania drgań poprzecznych belki (1D) oraz drgań poprzecznych cienkiej płyty (2D);
- wyznaczenie rozkładu temperatury w pierścieniach ślizgowych bezстыkowych uszczelnień czołowych za pomocą metody funkcji Trefftza;
- zastosowanie metody kolejnych przybliżeń Picarda z użyciem funkcji Trefftza w odniesieniu do bezpośrednich i odwrotnych zagadnień przewodzenia ciepła oraz drgań poprzecznych belek i cienkich płyt.

Stwierdzam, że problem naukowy został przez Doktorantkę wyodrębniony, a jego rozwiązanie można uważać za w pełni oryginalne.

Uważam, że nabyta przez Doktorantkę w trakcie wykonywania tej pracy wiedza, umiejętność formułowania i rozwiązywania problemów badawczych, krytyczna ocena uzyskanych wyników badań są wystarczające do prowadzenia samodzielnej pracy naukowej w przyszłości.

Czytając jednak tę pracę nasunęły mi się pewne uwagi mające charakter dyskusyjny, a dodatkowo napotkałem w niej pewne usterki związane z edycją tekstu rozprawy, które nie podważają wartości pracy doktorskiej.

3. Uwagi szczegółowe

Na wstępie chciałbym się podzielić pewnymi spostrzeżeniami, które mają charakter ogólny i mogą być podstawą do dyskusji.

Rozpatrywane w pracy doktorskiej przykłady nieliniowych zagadnienia początkowo-brzegowych (5.19, 7.40) dobierano w taki sposób, żeby istniało dla nich rozwiązanie analityczne. Na podstawie twierdzenia Picarda ciąg kolejnych przybliżeń Picarda posiada punkt stały ($f(x) = x$), jeżeli f jest funkcją ciągłą oraz spełnia lokalny warunek Lipschitza. Stąd uzasadnione było połączenie metody funkcji Trefftza z metodą kolejnych przybliżeń Picarda do otrzymania rozwiązania przybliżonego. Czy były prowadzone próby, dla których rozwiązanie analityczne problemu nie jest znane, a nieliniowość problemu ma charakter silny?

Zastosowana w pracy metoda znajdowania rozwiązań przybliżonych problemów początkowo-brzegowych oparta jest na połączeniu metody funkcji Trefftza, które spełniają tożsamościowo równanie różniczkowe jednorodnie i stanowią układ funkcji T-zupełny, ale w ogólności nie spełniają one warunków granicznych. Uzyskane w pracy błędy aproksymacji rozwiązania zależą od liczby funkcji Trefftza i przyjętych długości przedziałów czasowych. Wyniki identyfikacji obciążenia cienkiej płyty widoczne na rysunkach 8.10(A, B) i 8.14(A, B) są jakościowo niezgodne z rozwiązaniem dokładnym. Czym należałoby się kierować przy doborze liczby funkcji Trefftza i długości przedziałów czasowych w realnym eksperymencie aby zapobiec takiej niezgodności?

Podrozdział 4.2 pracy zatytułowany jest „*Identyfikacja strumienia ciepła w warstwie płaskiej – optymalny dobór węzłów*”. Wyniki identyfikacji strumienia ciepła o różnych kształtach metodą funkcji Trefftza potwierdzają, że mniejsze są błędy aproksymacji gdy punkty pomiarowe są zagęszczone przy brzegu obszaru zgodnie z położeniem zer wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju. Jest to zresztą zgodne z fizyką zjawiska, ponieważ przepływ ciepła jest procesem dyfuzyjnym tłumionym przez ośrodek. Zatem odpowiedź termiczna układu (sygnał zaburzony) w punkcie oddalonym od brzegu obszaru podlega wzmocnieniu, kiedy zostaje ona transformowana na brzeg. Rodzi się jednak pytanie, na jakiej podstawie przyjęto, że w takim przypadku mamy do czynienia z optymalnym doбором położenia punktów pomiarowych?

Przechodzę teraz do uwag szczegółowych

- Str. 5 – w wykazie ważniejszych oznaczeń podano „ a – współczynnik dyfuzyjności cieplnej”. W literaturze przedmiotu stosuje się zamiennie „ a – dyfuzyjność cieplna” lub „ a – współczynnik wyrównywania temperatury”.
- Str. 15, błąd edytorski. Powinno być $\tilde{\Omega} = \Omega \times (0, t)$, gdyż przez Ω oznaczono wcześniej skończony podzbiór R^n .

- Str. 21. Miano współczynnika przewodzenia ciepła zapisane w postaci $\left[\frac{W}{mK} \right]$ wprowadza pewną wątpliwość. Taki zapis może być odczytany jako watt na milikelvin. Poprawny zapis to $\left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$.
- Str. 23 – wzory 4.4 i 4.5 na operator odwrotny w podanej wersji nie pozwalają na stosowanie rekurencji. To samo dotyczy się wzorów 5.9, 5.10, 7.9, 7.10, 8.8-8.11.
- Str. 28, wzór 4.18. Retransformata Laplace’a wzoru (4.17) - moim zdaniem - powinna mieć postać: $T(x,t) = q(t) * \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos[(1-x)\alpha_n] \cdot e^{-\alpha_n^2 \cdot t} \right)$. W jaki sposób uzyskano wzory (4.22)-(4.24) wykonując operację splotu funkcji zastosowaną do wzoru (4.18) z uwzględnieniem wzorów (4.19)-(4.21)? Moim zdaniem powinno się to znaleźć w dodatku do pracy, gdyż Autorka podając wzory (4.22)-(4.24), nie powołuje się na literaturę.
- Str. 83 – model matematyczny przedstawiony w podrozdziale 6.2 nie pozwala na wyznaczenie pola temperatury w szczelinie promieniowej, w której znajduje się płyn, gdyż nie podano dla płynu równania Fouriera-Kirchhoffa. Równanie to dla poruszającego się płynu przy uwzględnieniu dysypacji energii i przyjętych założeniach upraszczających ma postać: $\mu \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right)^2 + \lambda^f \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2} = 0$.

Uwagi o charakterze językowym

Doktorantka w tekście rozprawy stosuje zamiennie termin „pole temperatur” oraz „pole temperature”. Uważam, że powinno się stosować termin „pole temperature” gdyż mamy tu na myśli określony rodzaj temperatury (bezwzględna, empiryczna, spiętrzania), który jest miarą energii wewnętrznej danego ciała lub układu, natomiast termin „pole temperatur” możemy zastąpić przez „pole wartości temperature”. W ten sposób pozbywamy się rusycyzmu „polje tiemperatur”.

W tekście rozprawy pojawia się w kilku miejscach zwrot „chwila czasu” (str. 27, 29, 115, 149). Jest to pleonazm typu „masło maślane”, bowiem słowo „chwila” oznacza już pewien przedział czasu.

W całej pracy Doktorantka posługuje się terminem „zagadnienie proste”. W moim przekonaniu powinno się stosować termin „zagadnienie bezpośrednie”, gdyż „zagadnienie proste” wcale nie musi być łatwe do rozwiązania.

Na stronie 26 pojawia się termin „pomiaru temperaturowe”. Termin ten jest nieodpowiedni, gdyż może prowadzić do powstania wątpliwości czy Autorce chodziło o pomiary temperatury, czy też o pomiary właściwości termofizycznych, które są funkcjami temperatury.

Na stronie 27 można znaleźć termin „warunek strumieniowy” zamiast „warunek brzegowy drugiego rodzaju” albo „warunek brzegowy Neumanna”

Na stronie 81 wyrażenie $\theta = T - T_0$ zostało nazwane zmiana temperatury. Z postaci tego wyrażenia wynika, że mamy tu do czynienia z „nadwyżką temperatury”

Uwagi o charakterze ogólnym

- W tekście rozprawy nie podano wzorów, z których wyznacza się wielomiany ciepłne, belkowe czy też płytowe w sposób rekurencyjny. Ograniczono się tu jedynie do

wypisania kilku początkowych funkcji Trefftza. Takie wzory są oczywiście dostępne w literaturze, ale moim zdaniem powinny być zamieszczone w pracy.

- W pracy nie zamieszczono przykładowego wydruku programu komputerowego, który mógłby się pojawić w załączniku. Bez takiego wydruku trudno jest się zorientować, czy wyniki testów numerycznych zamieszczone w pracy zostały uzyskane przez Doktorantkę samodzielnie czy też zostały tu wykorzystane gotowe programy komputerowe promotora.
- Uważam, że postawiona w pracy teza jest zbyt ogólna i powinna być ograniczona do grupy zagadnień rozpatrywanych w pracy bowiem nie przeprowadzono testów numerycznych dla przypadku gdy nieliniowość problemu występuje w warunku brzegowym. Jest to kluczowa sprawa dla metody funkcji Trefftza, gdyż funkcje te na ogół nie spełniają warunków granicznych, w przeciwieństwie do metody elementów skończonych, która jest powszechnie stosowana i rozwijana.

4. Wniosek końcowy

Przedstawiona rozprawa doktorska i dorobek naukowy mgr Anny Pawińskiej reprezentują wysoki poziom naukowy potwierdzony 4 publikacjami z listy Journal Citation Reports oraz publikacjami krajowymi. Doktorantka posiadała w dużym stopniu umiejętność prowadzenia badań naukowych wyrażającą się dostrzeżeniem i sformułowaniem problemu naukowego oraz przedstawieniem sposobu jego rozwiązania, krytycznego spojrzenia na uzyskane wyniki badań oraz poszerzyła w znacznym stopniu wiedzę w zakresie analizy matematycznej, metod numerycznych, informatyki, wymiany ciepła oraz drgań układów ciągłych. Uważam, że niezależnie od napotkanych błędów językowych, krytycznych komentarzy i uwag wyniki badań przedstawione w tej pracy są bardzo wartościowe i wnoszą istotne elementy nowości naukowej.

Wkład Doktorantki w rozwój dyscypliny naukowej mechanika jest wystarczający do ubiegania się o stopień doktora nauk technicznych.

W moim przekonaniu rozprawa doktorska mgr Anny PAWIŃSKIJ pt. „ANALIZA MOŻLIWOŚCI ZASTOSOWANIA FUNKCJI TREFFTZA DO ROZWIĄZYWANIA NIELINIOWYCH ZAGADNIENÍ ODWROTNYCH MECHANIKI” spełnia warunki stawiane rozprawom doktorskim przez ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki z dnia 14 marca 2003 (Dz. U. 2003 nr 65 poz. 595) z późniejszymi zmianami i może być podstawą dopuszczenia jej do publicznej obrony przed Radą Wydziału Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach.

Wnoszę o wyróżnienie pracy

Rozprawa doktorska mgr Anny Pawińskiej jest wyróżniająca ze względu na wniesione elementy nowości naukowej oraz szeroki zakres problematyki badawczej popartej licznymi przykładami.

