dr hab. inż. Andrzej Frąckowiak, prof. PP
Katedra Techniki Cieplnej
Politechnika Poznańska

Poznań, 14 lipca 2016

Recenzja

pracy doktorskiej mgr Anny Pawińskiej

pt.: „ANALIZA MOŻLIWOŚCI ZASTOSOWANIA FUNKCJI TREFFTZA DO ROZWIĄZYWANIA NIELINIOWYCH ZAGADNIEŃ ODWROTNYCH MECHANIKI"

Podstawę do opracowania recenzji pracy doktorskiej mgr Anny Pawińskiej stanowi pismo Dziekana Wydziału Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej z dnia 16.06.2016r.

Praca zawiera 187 stron i podzielona jest na 9 rozdziałów poprzedzonych spisem treści, wykazem ważniejszych symboli i indeksów, a zakończoną bibliografią liczącą 98 pozycji literaturowych związanych z tematem pracy, spisem tabel i rysunków oraz streszczeniem pracy w języku polskim i angielskim.

1. Omówienie pracy

Praca mgr Anny Pawińskiej dotyczy zastosowania funkcji Trefftza do rozwiązywania zagadnień odwrotnych mechaniki. Ze spisu literatury wynika, że Doktorantka jest autorem jednej i współautorem 3 prac cytowanych w rozprawie.

W rozdziale 1 Doktorantka podaje uzasadnienie wyboru tematyki badań oraz formułuje następującą tezę badawczą: „Metoda funkcji Trefftza jest skutecznym narzędziem rozwiązywania prostych oraz granicznych zagadnień odwrotnych dla procesów opisywanych nieliniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi oraz zagadnień odwrotnych identyfikacji źródeł". Jako główny cel swojej pracy przyjmuje opracowanie skutecznej metody rozwiązywania wybranych prostych i odwrotnych zagadnień mechaniki.

W rozdziale 2 przedstawiony został aktualny stan wiedzy związany z zastosowaniem funkcji Trefftza do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Z przeglądu literatury wynika, że funkcje Trefftza są powszechnie stosowane do rozwiazywania zagadnień prostych (bezpośrednich) i odwrotnych dla równania przewodnictwa ciepła, równań termosprężystości, równania falowego oraz równań opisujących drgania płyt i belek. Szczególną uwagę poświęcono przeglądzie metod, które Doktorantka rozwinęła w swojej pracy. Można do nich zaliczyć metodę iteracji Picarda, stosowaną do rozwiązywania zagadnień nieliniowych oraz połączenie metody elementów skończonych z funkcjami Trefftza jako funkcjami bazowymi.

Rozdział 3 zawiera opis metody, która została zastosowana do rozwiązania zagadnień prostych i odwrotnych mechaniki. Metoda ta w ogólnym przypadku dotyczy rozwiązywania niejednorodnych nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Rozwiązanie liniowego równania różniczkowego poszukiwane jest w postaci kombinacji liniowej funkcji Trefftza, tożsamościowo spełniających to równanie i tworzących układ zupełny tych funkcji. Autorka tę ideę stosuje również w Metodzie Elementów Skończonych. W rozdziale tym wymienione są trzy warianty tej metody. Do rozwiązywania zagadnień nieliniowych Doktorantka stosuje Metodę Iteracji Picarda. W metodzie tej operator różniczkowy rozkładany jest na składową liniową i nieliniową. Rozwiązanie początkowe przyjmowane jest w postaci kombinacji liniowej funkcji Trefftza, a następnie w procesie iteracji i stosowaniu operacji odwrotnych otrzymywane jest rozwiązanie równania nieliniowego. Wyniki obliczeń wykonane za pomocą opisanej metody zostały przedstawione w następnych rozdziałach.

W rozdziale 4, funkcje Trefftza zostały zastosowane dla jednowymiarowego liniowego zagadnienia przewodnictwa ciepła we współrzędnych bezwymiarowych. Udowodnione zostało twierdzenie o liczbie oraz liniowej niezależności funkcji cieplnych (funkcji Trefftza dla niestacjonarnego równania przewodnictwa ciepła). W celu przetestowania proponowanej metody zostało sformułowane i rozwiązane analitycznie zagadnienie testowe. Rozwiązanie to pozwala na ocenę poprawności rozwiązania numerycznego za pomocą zdefiniowanych w tym rozdziale norm względnych. Zbadany został wpływ rozmieszczenia węzłów pomiarowych (równoodlegle oraz węzły Czebyszewa) na dokładność rozwiązania zagadnienia prostego i odwrotnego. Zbadana została również stabilność rozwiązania zagadnienia odwrotnego. W tym celu wartości temperatury w węzłach pomiarowych zostały zaburzone błędem losowym. Obliczenia zostały również wykonane Metodą Elementów Skończonych z aproksymacją rozwiązania za pomocą kombinacji liniowej funkcji Trefftza w każdym elemencie. Obszar został podzielony na dwa elementy skończone. Połączenie rozwiązań w elementach osiągnięte zostało za pomocą funkcjonału minimalizującego średniokwadratowy błąd temperatury i jej pochodnej na granicy elementów skończonych. Wyniki obliczeń porównane z analitycznym rozwiązaniem potwierdziły dużą zgodność rozwiązań numerycznych zagadnień prostych i odwrotnych z rozwiązaniem analitycznym.

Przedstawione w rozdziale 5 rozważania dotyczą zastosowania funkcji Trefftza do rozwiązywania nieliniowych, dwuwymiarowych zagadnień stacjonarnych przewodnictwa ciepła. Układ rozdziału podobny jest do poprzedniego. Udowodnione zostało twierdzenie o liczbie oraz liniowej niezależności funkcji Trefftza dla równania Laplace'a (wielomianów harmonicznych) w przestrzeni dwuwymiarowej. Analitycznie zostało rozwiązane nieliniowe równania przewodnictwa, które posłużyło do potwierdzenia poprawności rozwiązań numerycznych. Do obliczeń użyto bezwęzłowej metodę elementów skończonych z funkcjami Trefftza oraz metodę iteracji Picarda z funkcjami Trefftza. Zbadano wpływ odległości punktów pomiarowych od brzegu, na którym nieznany jest warunek brzegowy ($\varepsilon = 0{,}1$ i $\varepsilon = 0{,}3$), na rozwiązanie numeryczne zagadnienia odwrotnego. Zadane w węzłach pomiarowych wartości temperatury wyznaczone z rozwiązania analitycznego zaburzono błędem losowym i zbadano wpływ tego błędu na stabilność rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Wyniki obliczeń uzyskane za pomocą obu metod potwierdziły dużą zgodność z rozwiązaniem analitycznym.

Rozdział 6 zawiera wyniki obliczeń dla zagadnienia odwrotnego wyznaczania rozkładu temperatury w pierścieniach ślizgowych uszczelnień bezstykowych. Przedstawiony został schemat bezstykowego uszczelnienia czołowego oraz model matematyczny wymiany ciepła w takim uszczelnieniu. Rozkład temperatury w części ruchomej i nieruchomej uszczelnienia przybliżony został za pomocą kombinacji liniowej funkcji Trefftza. W części nieruchomej połączenia rozwiązane zostało zagadnienie odwrotne. Nieznane wartości temperatury na powierzchni uszczelnienia zostały wyznaczone na podstawie znanych wartości temperatury (z rozwiązania analitycznego) w pewnej odległości od brzegu uszczelnienia ($z = -0{,}002$). Obliczenia zostały przeprowadzone dla różnych wartości liczby funkcji Trefftza oraz dla zadanej wartości błędu losowego $\delta = 0{,}02$ wartości temperatury wewnątrz statora. Wyniki obliczeń wskazują na wzrost dokładności rozwiązania zagadnienia odwrotnego dla dokładnych wartości temperatury wraz ze wzrostem liczby funkcji Trefftza. W przypadku danych obciążonych błędem pomiarowym wzrost dokładności rozwiązania występuje, gdy liczba funkcji Trefftza nie przekracza 40.

W rozdziale 7 przedstawione zostało rozwiązanie zagadnienia prostego i odwrotnego drgań belki, wyznaczone za pomocą funkcji Trefftza. Równanie opisujące drgania belki jest równaniem różniczkowym czwartego rzędu. Podobnie jak we wcześniejszych rozdziałach zostało udowodnione dla rozwiązania tego równania twierdzenie o liczbie i liniowej niezależności funkcji Trefftza. Podane zostało analitycznie rozwiązane zagadnienie testowe, z którym porównano zagadnienie proste rozwiązane numerycznie metodą funkcji Trefftza. Przedstawione zostały również wyniki obliczeń dla stałej i sinusoidalnej funkcji wymuszenia drgań belki. Zagadnienie odwrotne dla równania opisującego drgania belki zostało sformułowane w dwóch wariantach: jako zagadnienie identyfikacji warunków brzegowych oraz zagadnienie identyfikacji funkcji wymuszającej drgania belki. Zbadana została wrażliwość rozwiązania zagadnienia odwrotnego na błędy losowe funkcji przemieszczenia w wybranych punktach belki. Jako ostatnie zostało rozwiązane zagadnienie proste drgań swobodnych belek geometrycznie nieliniowych metodą iteracji Picarda z zastosowaniem funkcji Trefftza. Wszystkie rozwiązane w rozdziale zagadnienia pokazały skuteczność metod, w których do aproksymacji rozwiązania wykorzystane zostały funkcje Trefftza.

Rozdział 8 jest uogólnieniem rozważań z poprzedniego rozdziału na zagadnienia związane z drganiami płyt. Układ rozdziału jest podobny jak rozdziału 7.

Kończący pracę, rozdział dziewiąty stanowi podsumowanie wyników pracy oraz wnioski końcowe. Na szczególną uwagę zasługują oryginalne osiągnięcia Autorki, do których można zaliczyć :

- opracowanie metody rozwiązywania nieliniowych zagadnień prostych przewodnictwa ciepła oraz drgań belki (połączenie funkcji Trefftza i metody iteracji Picarda),
- opracowanie metody rozwiązywania nieliniowych, brzegowych zagadnień odwrotnych,
- opracowanie metody rozwiązywania zagadnień odwrotnych związanych z identyfikacją funkcji źródła (zagadnienia identyfikacji obciążenia belki oraz płyty),
- sformułowanie i udowodnienie twierdzeń o liczbie i liniowej niezależności funkcji Trefftza dla rozważanych równań różniczkowych cząstkowych.

2. Uwagi

Oznaczenia

W spisie oznaczeń wielkości E, δ, ε oznaczają względny błąd aproksymacji w normie $L2$. Dlaczego użyto tyle symboli do oznaczenia jednej wielkości w całej pracy, tym bardziej, że niektóre z nich mają inne znaczenie?

Str. 8

Stwierdzenie, że „funkcje Trefftza są liniowo niezależne i tworzą układ zupełny" nie do końca jest prawdziwe. Jeśli weźmiemy pod uwagę dwie dowolne funkcje Trefftza, to ich kombinacja liniowa też będzie funkcją Trefftza. Funkcje Trefftza wcale nie muszą tworzyć układu zupełnego funkcji.

Str. 15

„Równanie (3.1) nazywane jest jednorodnym, jeśli $f(x) = 0$, natomiast dla $f(x) \neq 0$ jest to równanie niejednorodne, którego rozwiązanie jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego."
Czy stwierdzenie to jest prawdziwe dla równań nieliniowych?

Str. 17

„Należy podkreślić, że w kombinacji liniowej nie jest możliwe użycie nieskończonej liczby funkcji Trefftza".
Skąd takie stwierdzenie? Jeżeli weźmiemy pod uwagę ciąg zupełny funkcji Trefftza, to zastąpienie kombinacji liniowej funkcji przez szereg daje rozwiązanie dokładne. Np. funkcja tworzące wielomiany cieplne

$$e^{p^2 t + px} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x,t) p^n$$

daje się przedstawić w postaci szeregu funkcji Trefftza.

Str. 18

Metoda ciągła – analogia do klasycznej MES jest nie do końca prawdziwa. Klasyczna MES wprowadza definicję funkcji bazowej w przestrzeni izoparametrycznej. Taka definicja pozwala na uzyskanie ciągłości funkcji kształtu na brzegach. W metodzie funkcji Trefftza funkcje kształtu definiuje się w przestrzeni fizycznej. Ciągłość tej funkcji jest zachowana tylko w węzłach siatki.

Str. 23 Twierdzenie 4.1

Warto dodać, że operacje odwrotne nie są jednoznaczne i można je wykonać z dokładnością do dowolnej funkcji Trefftza (dla rozważanego równania będzie to funkcja spełniająca równanie przewodnictwa ciepła). W dowodzie następnego twierdzenia ta niejednoznaczność jest już uwzględniona przez człon $L^{-1}(0)$.

Str. 28

Rozwiązania analityczne przyjęte do porównania z rozwiązaniem numerycznym otrzymane zostały za pomocą transformaty Fouriera i są prawdziwe w przedziale od 0 do ∞. We wzorze (4.22) i (4.23) dla t dążącego do ∞ rozwiązanie też dąży do nieskończoności. Może więc trzeba doprecyzować wzory (4.19) – (4.21) np. w ten sposób, że dla $t > 0{,}2$ strumień jest równy zero. Wówczas wzory analityczne będą miały fizyczny sens.

Str. 29

Wybrano dwa sposoby rozmieszczenia punktów pomiarowych: równomierny i w węzłach Czebyszewa. Trudno sobie wyobrazić, że w praktyce tyle będzie punktów pomiarowych. Pomiar temperatury związany jest z umieszczeniem wewnątrz badanego materiału termopary. W praktyce tych punktów jest niewiele. Dodatkowo zagęszczanie węzłów pomiarowych w pobliżu brzegu obszaru jest technogicznie niemożliwe do wykonania. Wobec tego lepiej powiedzieć, że dane są punkty wewnątrz materiału, w których znana jest temperatura.

Co oznacza optymalny dobór węzłów zapowiadany w tytule rozdziału 4.2? Z treści rozdziału wynika tylko, że zbadane zostały dwa sposoby rozmieszczenia węzłów pomiarowych: równomierny i w węzłach Czebyszewa.

Str. 34 Wzór (4.31)

Zmienna losowa δ_k ma rozkład normalny? Doktorantka nie podaje sposobu generacji liczb losowych. Czy nie jest to przypadkiem zmienna losowa wygenerowana z funkcji generującej liczby pseudolosowe z przedziału (0,1). Jeśli tak, to jest to zmienna losowa o rozkładzie jednostajnym, a nie normalnym. Z generatora o takim rozkładzie można uzyskać generator liczb losowych o rozkładzie normalnym obliczając odwrotną dystrybuantę dla rozkładu normalnego.

Str. 43 Tabele 4.11 i 4.12

Dla niezaburzonych danych widać, że błąd rozwiązania maleje wraz ze wzrostem liczby funkcji Trefftza. W przypadku danych zaburzonych taka prawidłowość nie występuje, co więcej dla 15 funkcji Trefftza błąd rozwiązania jest mniejszy niż dla niezaburzonych danych.

Str. 44

„Na Rysunku 4.7 została zaznaczona lokalizacja wewnętrznych odpowiedzi temperaturowych. Punkty pomiarowe powinny znajdować się w pierwszym elemencie od brzegu, na którym identyfikowany jest strumień ciepła. Lokalizacja punktów pomiarowych w dalszych elementach powoduje znaczą propagację błędów. Zatem zwiększanie liczby podobszarów, a tym samym zmniejszanie rozmiarów elementów, powoduje ograniczenie co do odległości od brzegu punktów pomiarowych. Dlatego też w zagadnieniu odwrotnym korzystniej jest wykorzystywać małą liczbę dużych elementów."

To stwierdzenie nie jest poparte żadnymi badaniami, ani nie jest zacytowana praca, na podstawie której to stwierdzenie zostało napisane. Szkoda, że w pracy zbadany został tylko wpływ liczby węzłów pomiarowych i sposób ich rozmieszczenia, a nie zbadano wpływu ich odległości w stosunku do brzegu $x = 0$. W granicy, gdy położenie punktów pomiarowych znajdzie się na osi $x = 1$ otrzymuje się zagadnienie odwrotne typu Cauchy'ego.

Może warto w czasie prezentacji na obronie doktoratu pokazać ten wpływ i w ten sposób uzupełnić swoje badania dotyczące zagadnienia odwrotnego.

Str. 45 Czy funkcjonał (4.38) nie powinien być postaci

$$I = \int_0^{0,5} \theta_1(x,0)^2\,dx + \int_{0,5}^{1} \theta_2(x,0)^2\,dx + \int_0^{0,2} \left(\frac{\partial \theta_2(1,t)}{\partial x}\right)^2 dt + \sum_{k=1}^{K} \left(\theta_1(0,1;t_k) - T(0,1;t_k)\right)^2 +$$
$$+ \int_0^{0,2} \left(\theta_2(0,5;t) - \theta_1(0,5;t)\right)^2 dt + \int_0^{0,2} \left(\frac{\partial \theta_2(0,5;t)}{\partial x} - \frac{\partial \theta_1(0,5;t)}{\partial x}\right)^2 dt$$

Str. 49

Czy prawdziwe jest stwierdzenie:

„Na podstawie wyników zamieszczonych w Tabeli 4.12, Tabeli 4.13 i Tabeli 4.14 można wnioskować, że w metodzie bezwęzłowej rozmieszczenie pomiarów w węzłach Czebyszewa zmniejsza błąd aproksymacji."?

Z danych zamieszczonych w tabeli 4.12 wynika, że jest odwrotnie.

Str. 58, Rozdział 5.1. Twierdzenie o liczbie i o liniowej niezależności funkcji Trefftza dla równania Laplace'a w przestrzeni dwuwymiarowej
Twierdzenie jest ważne z punktu widzenia przybliżania rozwiązania równania Laplace'a za pomocą kombinacji liniowej wielomianów harmonicznych. Nie jest pokazane, że te wielomiany tworzą układ zupełny. Można się domyślać, że tylko kombinacja liniowa kolejnych wielomianów harmonicznych prawidłowo przybliża rozwiązanie równania Laplace'a.

Str. 59, tabela 5.1
Funkcja harmoniczna zerowego rzędu jest tylko jedna.

Str. 61
We wzorze (5.26) występują nie tylko operatory.

Str. 68, tabela 5.3
Trudno jest porównywać wyniki obliczeń dla różnej liczby podobszarów i takiej samej liczby funkcji Trefftza w podobszarze. Jeżeli w każdym z 9 podobszarów stosujemy po 5 funkcji Trefftza, to rozwiązanie w całym obszarze jest opisane za pomocą 45 nieznanych współczynników. Chyba chodzi o to, że lepiej dzielić obszar na podobszary i w każdym z nich przybliżać rozwiązanie za pomocą wielomianów harmonicznych niższego stopnia, niż w całym obszarze za pomocą 45 wielomianów harmonicznych.

Str. 74, tabela 5.4
Dlaczego obliczenia zatrzymują się na 4 iteracji. Co dzieje się dalej? Czy nie powinno być lepiej po kilku następnych iteracjach? Uwaga dotyczy również następnych wyników obliczeń z tego rozdziału. We wszystkich obliczeniach proces iteracji kończy się na czwartej iteracji.

Str. 80
Autorka stwierdza: „... dane są wewnętrzne odpowiedzi temperaturowe w określonej odległości od nieznanej części brzegu." Rozważając problem mający znaczenie praktyczne, należy sobie odpowiedzieć na pytanie: w jaki sposób wykonany jest pomiar temperatury wewnątrz statora? W rozdziale nie jest podane w ilu punktach znana jest odpowiedź temperaturowa, podana jest tylko liczba funkcji Trefftza.

Str. 81
θ nie oznacza zmianę temperatury, tylko temperaturę odniesioną do temperatury otaczającego płynu.

Str. 81
$h(r)$ -funkcja opisująca wysokość szczeliny promieniowej – nie jest podany wzór tej funkcji.

Str. 87, rys. 6.2
Z rysunku wynika, że warunki brzegowe dla rotora i statora są identyczne. Różnica występuje tylko we współczynnikach α i λ. Ta symetria ma odzwierciedlenie w wynikach pokazanych w dalszej części rozdziału. Jak wyglądałoby rozwiązanie tego zagadnienia, jeśliby połączyć oba pierścienie ze sobą i przyjmując warunki ciągłości temperatury i strumienia ciepła na połączeniu rotora i statora. Wówczas mamy zagadnienie proste w całym obszarze.

Str. 120

„Generalnie obserwuje się pogorszenie aproksymacji dla danych zaburzonych. Należy …" Ta prawidłowość występuje we wszystkich porównaniach obliczeń dla danych dokładnych i zaburzonych błędem losowym prezentowanych w rozprawie. Może zatem warto podać wyjaśnienie tego zjawiska.

Powyższe uwagi mają charakter dyskusyjny i nie zmniejszają merytorycznej wartości pracy.

3. Podsumowanie

Praca mgr Anny Pawińskiej potwierdziła słuszność postawionej przez nią tezy. Cele szczegółowe jakie postawiła sobie dla potwierdzenia tezy, zostały przez nią w pełni zrealizowane i stanowią jej oryginalne osiągnięcie.

Doktorantka wykazała się umiejętnościami formułowania i rozwiązywania zagadnień odwrotnych przewodnictwa ciepła, drgań belek oraz płyt. Na szczególna uwagę zasługują twierdzenia sformułowane i udowodnione przez Doktorantkę. Również analiza wrażliwości rozwiązania zagadnienia odwrotnego wykonana przez Doktorantkę wskazuje na rozumienie przez nią problemów związanych z uzyskaniem prawidłowego rozwiązania takiego zagadnienia.

W moim przekonaniu rozprawa doktorska mgr Anny Pawińskiej **zasługuje na wyróżnienie oraz spełnia wymogi Ustawy o Stopniach i tytule Naukowym** i wnoszę do Rady Wydziału Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej o dopuszczenie jej do publicznej obrony.

Andrzej Frąckowiak